Решения, 5. – 6. клас

Задача 1.

Ако n ученици винаги казват истината, тогава отговорът n трябва да се среща поне n пъти сред отговорите на учениците. Възможно е този отговор да се среща и повече пъти, защото има ученици, които понякога казват истината. От петте различни отговора *двама*, *трима*, *четирима*, *петима* и *шестима* само един удовлетворява това условие. Това е отговорът *трима*, който е даден общо четири пъти. Следователно има трима ученици, които винаги казват истината.

Задача 2.

Ученик B седи на стол A или на стол C. Разглеждаме и двата случая.

Ако B седи на стол A, тогава столове A и D са заети. Учениците C, D и E трябва да седнат на столове B, C и E, но тогава ученик E не може да бъде между C и D.

Следователно B седи на стол C. Тогава ученик C трябва да седне на стол B. Понеже ученик E трябва да бъде до ученик C, то трябва да седне на стол A, а непосредствено до него, на стол E, седи ученик D. В крайна сметка получаваме следното разположение:

стол	A	B	C	D	E
ученик	E	C	B	A	D

Задача 3.

Нека R, W, B са съответно броят на червените, белите и сините топки.

$$W + B = 4R, \quad R + B = 6W.$$

Изваждаме

$$W - R = 4R - 6W \Rightarrow W = \frac{5}{7}R.$$

Тогава

$$B = 4R - \frac{5}{7}R = \frac{23}{7}R.$$

Следователно R, което е четно число, се дели и на 7, т.е. е кратно на 14. Пишем $R = 14n$, тогава

$$W = 10n, \quad B = 46n.$$

Общият брой е $70n < 100 \Rightarrow n = 1$. Значи общо има 70 топки.

Задача 4.

Диана започва с нечетно число и след всяка стъпка, независимо дали се пада ези или тура, числото остава нечетно. Нека разгледаме как се променят последните цифри 1, 3, 5, 7 и 9 след всяко хвърляне на монетата:

	1	3	5	7	9
ези	3	7	1	5	9
тура	3	7	1	5	9

Виждаме, че за последната цифра няма значение дали се пада ези или тура. Цифрата 9 винаги остава 9, а останалите четири цифри се повтарят циклично през четири стъпки:

$$1 \to 3 \to 7 \to 5 \to 1 \to \cdots$$

Тъй като 2024 се дели на 4, последната цифра след 2026 хвърляния е същата като след 2 хвърляния. Следователно, за да завърши с цифра 3, Диана трябва да е започнала с число, завършващо на 5, т.е. с **5**.

Задача 5.

Забелязваме, че всяко от числата е двуцифрено. Число, което съдържа някоя от цифрите 0, 3, 6 или 9, се дели на 3 само ако и другата му цифра също е 0, 3, 6 или 9. Не можем да комбинираме 9 с 0, защото тогава числото ще се дели на 9. По същата причина не можем да комбинираме 6 и 3. Лесно се проверява, че от оставащите комбинации най-голямата сума е $93 + 60 = 153$.

От останалите шест цифри можем също да определим с кои други цифри могат да се комбинират:

$$8 - 4 - 2 - 1 - 5 - 7 - 8,$$

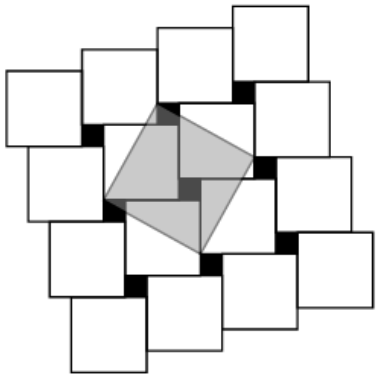
като между две цифри има тире, ако те могат да образуват число заедно. Има два начина да се образуват двойки. За да получим максимална сума, поставяме по-голямата цифра отпред:

$$84 + 21 + 75 = 180 \quad \text{или} \quad 42 + 51 + 87 = 180.$$

И в двата случая общият резултат е $153 + 180 = 333$.

Задача 6.

Разглеждаме какво се случва, когато направим сивата плочка прозрачна. Виждаме, че бялата част долу вдясно (под прозрачната плочка) съвпада точно с бялата част горе вляво и заедно тези части образуват бял квадрат. По подобен начин бялата част горе вдясно може да се допълни, като към нея се добавят малкият триъгълник горе вляво и частта долу вляво. Накрая черните части отгоре и отляво образуват точно един черен квадрат. Следователно лицето на сивия квадрат е равно на два пъти лицето на белия квадрат плюс два пъти лицето на черния квадрат. Лицето на сивата плочка е $2 \cdot 92 + 2 \cdot 7 = 198$.



Задача 7.

Всеки момент от време започва с часа, който трябва да бъде между 00 и 23, но тъй като първата цифра не може да е 0, възможни са само числата от 10 до 23; това са 14 възможности. Понеже всеки месец има най-малко 28 дни, тези начални цифри са винаги възможни и за дата. Същите начални цифри са възможни и за година.

Последните две цифри трябва да образуват месец. За това има само 12 възможности — от 01 до 12, като всички те са валидни и като означение за час или година.

Така броят на търсените числа е $14 \cdot 12 = 168$.

Задача 8.

Имаме

$$B = C \cdot F, \quad C = G \cdot D, \quad F = G \cdot I$$

Следователно

$$B = G^2 \cdot D \cdot I$$

Тъй като $B = 150$, следва $G^2 \mid 150 = 2.3.5^2$. Единствената възможност е $G = 5$.