Математически турнир „Иван Салабашев“
30 ноември 2024 г.
Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Вярното разлагане на многочлена $15ab + 2 - 3a - 10b$ на множители е:

А) $(5b-1)(2-3a)$ **Б)** $(5b-1)(3a-2)$ **В)** $(5b+1)(3a-2)$ **Г)** $(5b+1)(2-3a)$

Отговор: Б).

2. При хвърляне на два зара вероятността сборът от падналите се точки да е просто число е:

А) $\dfrac{5}{12}$ **Б)** $\dfrac{1}{2}$ **В)** $\dfrac{23}{36}$ **Г)** $\dfrac{1}{3}$

Отговор: А). Възможните сборове, които са прости числа са 2, 3, 5, 7 и 11. Съответните вероятности са $\dfrac{1}{36}, \dfrac{2}{36}, \dfrac{4}{36}, \dfrac{6}{36}, \dfrac{2}{36}$, като техният сбор е $\dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$.

3. Нека M е най-голямото цяло число, за което $M+1213$ и $M+3773$ са точни квадрати. Цифрата на единиците на числото M е:

А) 2 **Б)** 8 **В)** 1 **Г)** 6

Отговор: Б). Нека $M + 1213 = N^2$ и $M + 3773 = (N + a)^2$, като $a \geq 1$. Тогава $(N + a)^2 - N^2 = 2560$. При $a = 1$ лявата страна е нечетно число, а при $a = 2$ получаваме $N = 639$ и това е най-голямата възможна стойност на N. Тогава $M = N^2 - 1213 = 639^2 - 1213$ с последна цифра 8.

4. Ако $a < 0$ е рационално число, кой израз е равен на $|a - 2 - |a - 1||$?

А) $1 - a$ **Б)** 1 **В)** 3 **Г)** $3 - 2a$

Отговор: Г). При $a < 0$ имаме $|a - 1| = 1 - a$, като тогава изразът става $|2a - 3| = 3 - 2a$, отново поради $a < 0$.

5. В израза $1 + 3 + 5 + \cdots + 97 + 99$ Сашо променил някои знаци $+$ на $-$ така, че числената стойност на получения израз станала отрицателна. Колко най-малко знаци е променил Сашо?

А) 14 **Б)** 16 **В)** 15 **Г)** 17

Отговор: В). Сборът на всички числа е $1+3+5+\cdots+97+99 = 50^2 = 2500$. Ясно е, че трябва да сменим знаците на най-големите числа, т.е. търсим най-голямото n, за което:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) - (2n + 1) - \cdots - 97 - 99 < 0.$$

Горната сума е равна на $2n^2 - 2500$ и неравенството става $2n^2 < 2500$. Най-голямото естествено число, за което е изпълнено това неравенство е $n = 35$. Следователно има 35 положителни и 15 отрицателни събираеми.

6. Остатъкът, който израза $7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{2023} + 7^{2024}$ дава при деление с 19 е равен на:

А) 18 **Б)** 1 **В)** 7 **Г)** 0

Отговор: А). За произволно естествено число n имаме $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} = 7^n(1+7+7^2) = 7^n.57$, което се дели на 19. Понеже $2024 \equiv 2 \pmod 3$, то търсеният остатък е колкото на $7 + 7^2 = 56$, т.е. е равен на 18.

7. Увеличили дължината и широчината на правоъгълен паралелепипед с по 25%. С колко процента трябва да се намали височината на паралелепипеда, така че неговия обем да не се промени?

А) 40 **Б)** 44 **В)** 36 **Г)** 50

Отговор: В).

8. Числената стойност на израза $7.\dfrac{1}{37}+4\dfrac{36}{37}.2+\dfrac{1}{37}.4\dfrac{36}{37}+\left(4\dfrac{36}{37}\right)^2$ е:

А) 7 **Б)** 9 **В)** 49 **Г)** 35

Отговор: Г).

9. Даден е правоъгълник $ABCD$ за който $AB=8$ и $BC=4$. Точките M и N са съответно върху страните AB и BC, като $\sphericalangle DMN=90^\circ$. Ако триъгълниците DAM и DCN имат равни лица, колко е лицето на триъгълник DMN?

А) 13 **Б)** 15 **В)** 16 **Г)** 14

Отговор: Б). Ако означим $CN=x$, то $AM=2x$. Имаме

$$DM^2+MN^2=DN^2 \iff 4x^2+16+(4-x)^2+(8-2x)^2 \iff$$

Откъдето получаваме $x=1$ ($x=4$ е невъзможно поради $AM=2x<8$). Следователно

$$S_{DMN}=4.8-\frac{4.2}{2}-\frac{8.1}{2}-\frac{6.3}{2}=15.$$

10. За естественото число n полагаме

$$f(n)=\frac{n}{2}+\frac{n^2}{4}+\frac{n^4}{8}+\frac{n^8}{8}.$$

Колко от числата $f(2024)$, $f(2025)$, $f(2026)$ и $f(2027)$ са цели?

А) 4 **Б)** 2 **В)** 1 **Г)** 3

Отговор: А). Ако n е четно число, то $f(n)$ е цяло число. Ако n е нечетно не е трудно да се види, че $n\equiv 1 \pmod 2$, $n^2\equiv 1 \pmod 4$, $n^4\equiv 1 \pmod 8$ и $n^8\equiv 1 \pmod 8$, т.н. Следователно

$$f(n)=A+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=A+1,$$

Където A е цяло число.

11. Нека a и b са взаимнопрости естествени числа, за които $a>b$ и $\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^3}=\dfrac{73}{3}$. Колко е $a-b$?

Отговор: 3. Записваме даденото равенство като

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{73}{3}.$$

Ако положим $x=a^2+b^2$ и $y=ab$, лесно се вижда, че x и y са взаимнопрости и

$$\frac{x+y}{x-2y}=\frac{73}{3} \iff 3x+3y=73x-146y \iff \frac{x}{y}=\frac{149}{70}.$$

Понеже 149 и 70 са взаимнопрости, то $x=149$ и $y=70$. Тогава $(a-b)^2=x-2y=9$, т.е. $a-b=3$.

12. Таблица 3×3 е разделена на 9 единични квадратчета по обичайния начин. Всяко квадратче е оцжетено в черно или бяло по случаен начин. Таблицата е завъртяна на 90° по посока на часовниковата стрелка около центъра си. Всяко бяло квадратче, на което новата позиция първоначално е била черна, се преоцветява в черно. Цветовете на останалите квадратчета остават непроменени. Ако вероятността таблицата да стане изцяло черна е записана като несъкратима дроб $\frac{p}{q}$, то намерете $p+q$.

Отговор: 561. Ясно е, че централното квадратче трябва да е черно, то не се променя при ротацията. Да разгледаме четирите ъглови квадратчета и четирите по страните. За ъгловите имаме един случай всички да са черни. Четири случая на едно бяло и всички са благоприятни. Имаме шест случая на две бели, но само два от тях (при диагонални бели полета) са благоприятни. Няма благоприятни случаи с 3 или четири бели квадратчета. Общо благоприятните случаи са 7. Аналогично благоприятните случаи за четирите квадратчета по страните са 7. Общо за цялата таблица имаме 49 благоприятни оцветявания. Тъй като всички оцветявания са $2^9 - 512$, то търсената вероятност е $\frac{49}{512}$.

13. В една кошница има 300 топчета от по един, два или пет грама. Известно е, че общото тегло на топчетата е 1 килограм и топчетата от някой два вида са равен брой. Колко е този брой?

Отговор: 140. Нека имаме x, y и z топчета от по 1, 2 и 5 грама съответно. По условие $x + y + z = 300$ и $x + 2y + 5z = 1000$. Ако $x = y$ получаваме $7x = 500$, противоречие. Ако $x = z$ получаваме $x = z = 200$, $y = -100$, което е невъзможно. Ако $y = z$ намираме $x = 20$, $y = z = 140$.

14. В турнир по тенис участват 27 играчи. Всеки мач завършва с победа на единия играч, т.е. няма равни мачове. Всеки загубил, напуска турнира. След края на турнира се оказало, че N участници изиграли поне по 4 мача. Каква е възможна най-голямата стойност на N.

Отговор: 8. Ясно е, че общият брой мачове е 26, т.е. общият брой победи е също 26. Ако участник е изиграл поне 4 мача, той има поне 3 победи, което означава, че $N \leq 8$. Ще посочим пример за $N = 8$. 1 побеждава 25,26 и 27 и губи от 2; 2 побеждава 1, 23 и 24 и губи от 3; 3 побеждава 2, 21 и 22 и губи от 4; и т.н. 7 побеждава 6, 13 и 14 и губи от 8; 8 побеждава 7, 11 и 12 и губи от 9; 9 губи от 10.

15. Простото число p е такова, че за произволни цели числа a и b числата $10a + 3b$ и $a + 8b$ или и двете се делят на p, или и двете не се делят на p. Колко е сборът на всички възможни стойности на p?

Отговор: 18. Тъй като $10(a + 8b) - (10a + 3b) = 77b$, то (понеже 7 и 11 са взаимнопрости с 10) $p = 7$ и $p = 11$ са възможни стойности. Ако p е просто число, различно от 7 и 11, нека $b = 1$ и $a = p - 8$. Тогава $10a + 3b = 10p - 77$ не се дели на p, а $a + 8b = p$ се дели на p, противоречие.